یاحق

المپیاد آزمایشی

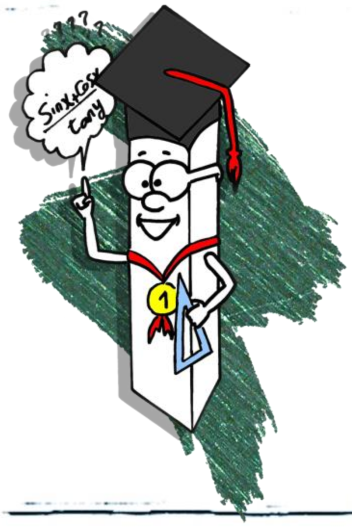
آیریسک

شماره داوطلبی و رمز:

پاسخنامه ریاضی

دی ۱۳۹۷

۱۸۰ دقیقه



۱- گزینهٔ ۲

در برخی موارد پایه‌ها و در برخی موارد توان‌ها را با $۳^{۱}$ مقایسه می‌کنیم:

$$۲^{\sqrt{۲}} = ۸^{\frac{\sqrt{۲}}{۳}} < ۹^{\frac{\sqrt{۲}}{۳}} = ۳^{\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}} = ۳^{\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۹}}} < ۳^{۱}$$

$$۹^{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = ۳^{\frac{۲}{\sqrt{۲}}} > ۳^{۱}$$

$$۲\sqrt[۳]{۳} = \sqrt[۳]{۲۴} < \sqrt[۳]{۲۷} = ۳$$

$$۲\sqrt{۲} = \sqrt{۸} < \sqrt{۹} = ۳$$

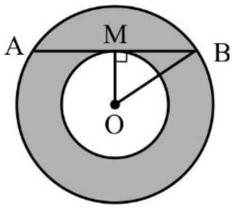
$$\sqrt{۷} < \sqrt{۹} = ۳$$

$$\sqrt{۳}^{\sqrt{۳}} = ۳^{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} < ۳^{۱}$$

پس تنها یک مورد از آن‌ها بزرگ‌تر از ۳ است.

۲- گزینهٔ ۳

به راحتی متوجه می‌شویم سطح آب مساحت ۱۰۰ دارد. و شکل کامل زیر مساحتش ۶۰۰ است. شعاع دو دایره را R و r گیرید.



$$OM^{۲} + MB^{۲} = OB^{۲}$$

$$\rightarrow MB^{۲} = R^{۲} - r^{۲}$$

$$۶۰۰ = \pi R^{۲} - \pi r^{۲} = \pi(R^{۲} - r^{۲}) = \pi . MB^{۲}$$

$$\rightarrow MB^{۲} = \frac{۶۰۰}{\pi} \rightarrow MB \simeq ۱۳/۸۱$$

$$, \quad AB \simeq ۲۷/۶۳$$

۳- گزینهٔ ۲

هر عضو برای رفتن در A و B سه حالت دارد:

A	B
✓	✓
×	✓
×	×

جواب: $۸۱ = ۳^{۴}$

۴- گزینهٔ ۱

$$\underset{a}{۱} \times \underset{a,d,e}{\binom{۵}{۳}} \times \underset{b}{۱} \times \underset{d,e}{۲} \times \underset{c,f}{۱} = ۲۰$$

۵- گزینهٔ ۱

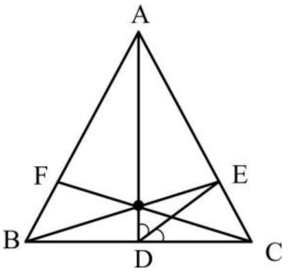
بنابر اتحاد مربع سه جمله‌ای داریم:

$$x^{۲} + y^{۲} + ۱ - ۲x - ۲y + ۲xy + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (x + y - ۱)^{۲} + ۱ = ۰$$

بنابراین معادله جواب حقیقی x و y ندارد.

۶- گزینهٔ ۴



$\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=1$: سوا

$\frac{CE}{EA}=\frac{CD}{AD}$: نیمسازها

$\Rightarrow \frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{CD}\times\frac{CD}{AD}=1$

$\Rightarrow \frac{AF}{FB}=\frac{AD}{BD} \Rightarrow$ DF نیمساز ADB است

$\Rightarrow F\hat{D}E=90^\circ$

$\Rightarrow \sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}=FD$

۷- گزینهٔ ۴

فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادلهٔ اصلی مسئله باشد. از $p(1,1)$ نتیجه بگیرید $f(2)=1$. از $p(2,1)$ نتیجه بگیرید $f(3)=\frac{2}{3}$ و به همین ترتیب می‌توان از قرار دادن $p(n,1)$ نتیجه بگیرید $f(3)=\frac{2}{3}$.پس گزینهٔ ۴ درست است.

۸- گزینهٔ ۲

توجه کنید که

$$n^3-5n^2-22n+56\overset{P}{\equiv}0 \Rightarrow (n-2)(n-7)(n+4)\overset{P}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow n\overset{P}{\equiv} 2 \text{ یا } 7 \text{ یا } -4$$

بنابراین برای $P\geq 7$، دقیقاً سه مقدار n وجود دارد. تنها جواب‌های مسأله، $P=5,3$ است.

۹- گزینهٔ ۵

به وضوح جمع هر دو وجه روبه‌رو باید ۳۶=۸+...+۱ شود. گزینه‌های ۱و۲ به دلیل جمع وجه‌های روبه‌رو ۳۶ حذف می‌شوند. گزینهٔ ۳ اصلاً گسترده یک مکعب نیست و به این دلیل حذف می‌شود. همچنین کمترین عدد هر وجه ۱۰=۱+۲+۳+۴ خواهد بود پس گزینه ۴ هم حذف است.

۱۰- گزینهٔ ۳

توجه کنید که

$$\begin{cases} a^{۲}+b+ab \mid ۲a^{۳}+۲a^{۲}b-۳ \\ a^{۲}+b+ab \mid ۲a^{۳}+۲ab+۲a^{۲}b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a^{۲}+b+ab \mid ۲a+۳$$

از طرفی $۲(a^{۲}+b+ab) > ۲ab+۳$

بنابراین:

$$a^{۲}+b+ab = ۲ab+۳ \;\Rightarrow\; a^{۲}-۳ = b(a-۱)$$

$$\Rightarrow a-۱ \mid a^{۲}-۳ \;\Rightarrow\; a-۱ \mid a^{۲}-۱-(a^{۲}-۳) \;\Rightarrow\; a-۱ \mid ۲$$

بنابراین $a \in \{۲,۳\}$ و در نتیجه $(a,b)=(۲,۱)$ یا $(۳,۳)$ که هر دو قابل قبول‌اند.

۱۱- گزینهٔ ۳

فرض کنید $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_۱ x + a_۰$ باشد. به وضوح در یک اتحاد که دو طرف تساوی چند جمله‌ای باشد، باید درجهٔ دو طرف ضریب بزرگ‌ترین توان و ضریب کمترین توان در دو طرف تساوی برابر باشند. در گزینهٔ یک ضریب بزرگ‌ترین توان دو طرف a_n و $۲^n a_n$ است. از برابری آن‌ها $n=۰$ به‌دست می‌آید. به وضوح چند جمله‌ای ثابت $p(x)=c$ در آن صدق نمی‌کند. در گزینهٔ دو اگر درجهٔ دو طرف را مساوی قرار دهیم داریم $n=۲n$ بنابراین $n=۰$ است. به وضوح $p(x)=c$ در آن صدق نمی‌کند. در گزینهٔ سوم هم از مقایسهٔ درجهٔ دو طرف تساوی داریم $n^{۲}=n$ بنابراین $n=۰$ یا $n=۱$ است. با جایگذاری $p(x)=c$ و $p(x)=ax+b$ در معادلهٔ موردنظر می‌توان فهمید که $p(x)=x+۱$ در معادله صدق می‌کند. در معادلهٔ آخر جمله ثابت دو طرف تساوی نمی‌تواند برابر باشد.

۱۲- گزینهٔ ۴

اگر $a-۱=x$ ، $b-۱=y$ و $c-۱=z$ باشند، آن‌گاه $x+y+z=۰$ خواهد بود. بنابراین $x+y=-z$ است. پس داریم:

$$xy \le \left(\frac{-z}{۲}\right)^{۲} \quad \Rightarrow \quad xyz \le \frac{z^{۳}}{۴}$$

بنابراین $k=\frac{۱}{۴}$ است. تساوی به ازای $a=۲$ و $c=b=\frac{۱}{۲}$ رخ می‌دهد.

۱۳- گزینهٔ ۲

به وضوح به ازای مقادیر مثبت x، سمت راست معادله یک تابع اکیداً نزولی و سمت چپ یک تابع اکیداً صعودی است. بنابراین نمودار این دو تابع حداکثر یک‌جا همدیگر را قطع می‌کنند. اما برای این‌که بگوییم حتماً یک جواب حقیقی و مثبت داریم، از تابع زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\frac{۱}{x}-۱$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to ۰} f(x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

بنابراین تابع پیوستهٔ f(x) ریشه‌ای در بازهٔ $(۰,\infty)$ دارد.

۱۴- گزینهٔ ۱

توجه کنید که طبق اتحاد اویلر،

$$\begin{aligned}۳^{۱۸}+۳^{۹}+۳^{۶}-۱&=(۳^{۶})^{۳}+(۳^{۲})^{۳}+(-۱)^{۳}-۳(۳^{۶})(۳^{۲})(-۱)\\&=(۳^{۶}+۳^{۲}-۱)A=۷۳۷A=۶۷\times ۱۱A\end{aligned}$$

بنابراین، باقی‌ماندهٔ تقسیم، برابر ۱ است.

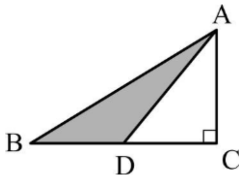
۱۵- گزینهٔ ۳

در هر گام فرد، یک خانه ۰ از بین رفته و خانه ۰ ایجاد نمی‌شود. پس بعد از ۱۰۰۱ مرحله، ۵۰۱ خانه ۰ از بین می‌رود. پس خانه‌های خالی:

$$۸۹۵=۱۳۹۶-۵۰۱$$

۱۶- گزینهٔ ۲

اگر دایره محیطی شکل را بکشیم و زاویه‌ها را بررسی می‌کنیم به راحتی متوجه می‌شویم سؤال با شکل زیر معادل است.



$B=۴۵^\circ$

$A=۴۵^\circ$

$S_{ACB}=\frac{۱}{۲}$

AD نیمساز است

$AC=۱\Rightarrow AB=\sqrt{۲}$

$$\frac{S}{S_{ACD}}=\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}\Rightarrow\frac{S}{S_{ABC}}=\frac{\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}\Rightarrow S=\frac{\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}\frac{(۲-\sqrt{۲})}{(۲-\sqrt{۲})}$$

$$S=\frac{۲\sqrt{۲}-۲}{۴-۲}=\sqrt{۲}-۱$$

۱۷- گزینهٔ ۳

توجه کنید که برای هر عدد فرد a، $a^{۴}\overset{۱۰}{\equiv}۱$. بنابراین $a^{۴۰}\overset{۱۰۰}{\equiv}۱$. از طرفی برای هر $n\geq ۵$، $۴۰|n!$. پس برای هر عدد فرد $n\geq ۵$ که $۵\nmid n$، $n^{n!}\overset{۱۰۰}{\equiv}۱$. بنابراین

$$۱^{۱!}+۳^{۳!}+\dots+۹۹^{۹۹!}\overset{۱۰۰}{\equiv}۱+۳^{۶}+۲۵+۱+۱+۱+۱+۲۵+۱+\cdots$$

$$\overset{۱۰۰}{\equiv}۱+۲۹+۱۰\times ۲۵+۳۸\overset{۱۰۰}{\equiv}۱۸$$

۱۸- گزینهٔ ۲

از جمع طرفین معادلات داریم:

$$a^{۲}+b^{۲}-۴a-۴b+۵+a^{۲}+b^{۲}=۰$$

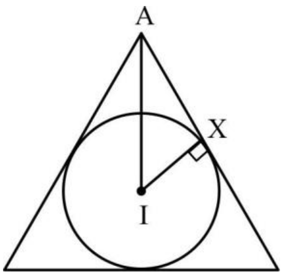
$$\Rightarrow (a^{۲}+b^{۲}+۴-۴a-۴b+۲ab)+(۱+a^{۲}b^{۲}-۲ab)=۰$$

$$\Rightarrow (a+b-۲)^{۲}+(ab-۱)^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a+b=۲\\ ab=۱\end{cases} \Rightarrow a+\frac{۱}{a}=۲ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow a=b=۱$$

پس تنها یک جواب داریم.

۱۹- گزینهٔ ۴



$$p=\frac{a+b+c}{۲} \qquad r=\frac{s}{p}$$

$$IX=r$$

$$AX=p-a$$

$$tg\frac{A}{۲}=\frac{r}{p-a} \Rightarrow (p-a)\,tg\frac{A}{۲}=r$$

به همین شکل $(p-b)\ tg\frac{B}{۲}=r$

$$(p-c)\ tg\frac{C}{۲}=r$$

ضرب این سه : $(p-a)(p-b)(p-c)\ tg\frac{A}{۲}\ tg\frac{B}{۲}\ tg\frac{C}{۲}=r^{۳}-\frac{s^{۳}}{p^{۳}}$

$$\Rightarrow p(p-a)(p-b)(p-c)\,tg\frac{A}{۲}\ tg\frac{B}{۲}\ tg\frac{C}{۲}\ \ tg\frac{C}{۲}-\frac{s^{۳}}{p^{۲}}$$

هرون $\Rightarrow s^{۲}=p(p-a)(p-b)(p-c)$

$$\Rightarrow tg\frac{A}{۲}\ tg\frac{B}{۲}\ tg\frac{C}{۲}=\frac{s}{p^{۲}} \qquad \Rightarrow p^{۲}=۱ \Rightarrow P=۱$$

$\Rightarrow$ محیط $=۲$

۲۰- گزینهٔ ۵

از آن‌جا که نمودار موردنظر نسبت به محور yها تقارن دارد پس اگر (x,y) جواب معادله باشد، باید $(-x,y)$ هم در معادله صدق کند. و چون نمودار نسبت به محور xها تقارن دارد. پس اگر (x,y) جواب باشد، باید $(x,-y)$ هم جواب معادله باشد و چون نسبت به نیمساز $x=y$ تقارن داریم، باید (y,x) هم در معادله صدق کند. تنها گزینهٔ ۵ این ویژگی‌ها را دارد.

۲۱- گزینهٔ ۴

از این نکته استفاده می‌کنیم که اگر جمع دو عبارت ثابت باشد، حاصلضرب آن‌ها زمانی حداکثر می‌شود که هر کدام برابر با نصف مجموع باشند:

$$۲^{x+۲}-۲^{۲x}+۳\times ۶^{x}-۳^{۲x}=\underbrace{۲^{x}(۴-۲^{x})}_{\text{جمع این‌ها ۴ است}}+\underbrace{۳(۶-۳^{x})}_{\text{جمع ۶ است}}$$

$$\leq ۲\times ۲+۳\times ۳=۱۳$$

همچنین تساوی به ازای $x=۱$ رخ می‌دهد.

۲۲- گزینهٔ ۵

دقت کنید که

$$(\sqrt{۶}+۲)^{۱۰۰}+(\sqrt{۶}-۲)^{۱۰۰}=۲(۶^{۵۰}+\binom{۱۰۰}{۲}۲\times ۶^{۴۹}+\dots+\dots+۲^{۱۰۰})\in\mathbb{Z}$$

از طرفی

$$\sqrt{۶}-۲<\frac{۱}{۲}\Rightarrow(\sqrt{۶}-۲)^{۱۰۰}<\frac{۱}{۲^{۱۰۰}}<\frac{۱}{(۱۰^{۳})^{۱۰}}=\frac{۱}{۱۰^{۳۰}}$$

بنابراین ۳۰ رقم ابتدای اعشار عدد $(\sqrt{۶}+۲)^{۱۰۰}$ برابر ۹ است.

۲۳- گزینهٔ ۵

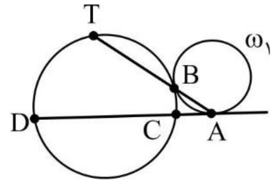
راستگو را با ۰ و دروغگو را با ۱ نشان می‌دهیم.

معنای ۰: زوج تا ۱ جلوی آن هستند.   معنای ۱: فرد تا ۰ جلوی آن هستند.

پس عدد اول ۰ است. پس کل افراد ۱۹۹ تا ۰ فرض کنید عدد دوم ۰ باشد، پس ۶۶۶ تا ۰ و ۳۳۳ تا ۱ داریم. حال نفر آخر اگر ۰ باشد، جلوی آن ۳۳۳ (فرد) تا ۱ است ※ و اگر ۱ باشد، ۶۶۶ تا (زوج) ۰ جلوی آن است ※ پس نفر دوم ۱ است. پس نفر سوم نیز ۱ است. پس تعداد ۱ ها کمتر مساوی ۲ است و چون ۲ تا ۱ پیدا کردیم تعداد ۱ ها دقیقاً ۲ تاست. پس ۰ ها ۹۹۷ تا هستند. نفر اول ۰ است پس کل افراد ۹۹۹ تا هستند.

۲۴- گزینهٔ ۱

لم:



AB از وسط کمان CD گذر می‌کند و $TB.TA = TC^2 = TD^2$

اگر از B بر دو دایره مماس کنیم در ω_1 دو زاویه ظلی ایجاد می‌شود که : $\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{TB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{TD}-\overset{\frown}{CB}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{TD} = \overset{\frown}{TC}$

$$T\hat{D}B = T\hat{A}D \Rightarrow T\hat{D}B \underset{\text{دو زاویه}}{\sim} T\hat{A}D \Rightarrow TD^2 = TB.TA = P^{T}_{\omega_1}$$

حال در سؤال: وسط کمان AB قوتش نسبت به ω_1 و ω_2 می‌شود TA^2 (طبق لم) چون نسبت به دو دایره یکسان است پس روی وتر مشترکشان است (محور اصلی) پس C همان T است یعنی PQ از وسط کمان AB می‌گذرد پس $AC = BC$

۲۵- گزینهٔ ۲

توجه کنید که

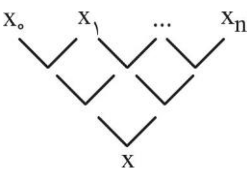
$$n^3 \overset{7}{\equiv} 0, \pm 1 \Rightarrow n^3+3 \overset{7}{\equiv} 3,2,4 \Rightarrow (n^3+3)^2-3 \overset{7}{\equiv} -1,1$$

$$\Rightarrow ((n^3+3)^2-3)^2+6 \overset{7}{\equiv} 0$$

بنابراین تنها مقدار اول عبارت مسأله، می‌تواند ۷ باشد که به ازای $n=1$ به‌دست می‌آید.

۲۶- گزینهٔ ۱

اگر از عدد هر خانه log بگیریم، عدد هر خانه جمع اعداد دوتای بالایی‌اش می‌شود. پس طبق مثلث خیام- پاسکال، عدد هر خانه می‌شود ترکیبی از اعداد سطر اول با ضرایب مثلث خیام- پاسکال:



$$x = \binom{n}{0}x_0 + \binom{n}{1}x_1 + \cdots + \binom{n}{n}x_n$$

(این ادّعا به راحتی با استقرا قابل اثبات است)

پس داریم: $\log x = \binom{7}{0}\log 1 + \cdots + \binom{7}{7}\log 8$

$$\rightarrow \quad x = 1^{\binom{7}{0}} \times 2^{\binom{7}{1}} \times \ldots \times 8^{\binom{7}{7}}$$

تعداد ۰ های x می‌شود تعداد ۵های تجزیه x که می‌شود $\frac{7\times6\times5}{6}=35$

۲۷- گزینهٔ ۵

اگر I محل همهٔ نیمسازها باشد می‌دانیم $OI^۲ = R^۲ - ۲Rr$

$$OI^۲ \geq ۰ \Rightarrow R^۲ - ۲Rr \geq ۰ \Rightarrow R > ۲r$$

ولی $۲\sqrt{۳} < ۴$ پس چنین مثلثی وجود ندارد.

(اگر چنین مثلثی وجود داشت $OM + ON + OP = r + R$ که با بطیموس به راحتی ثابت می‌شود)

۲۸- گزینهٔ ۱

اگر با اعداد $۲^t, \dots, ۱$ شروع کنید و ۲ مرحله بازی کنیم به راحتی دیده می‌شود که اعداد $۴k-۲ \ (k=۱,\dots,۲^{t-۱})$ می‌مانند. پس در ۲ گام اول: $۴k-۲ \ (k=۱,\dots,۳۲)$ می‌مانند. در ۴ گام اول: $۴(۴k-۲)-۲ \ (k=۱,\dots,۸)$ می‌مانند. در ۶ گام اول: $۴(۴(۴k-۲))-۲ \ (k=۱,۲)$ می‌مانند.

و پس از گام ۷ ام: $۴(۴(۴\times۴-۲)-۲)-۲ = ۸۶$ می‌مانند.

۲۹- گزینهٔ ۵

فرض می‌کنیم $m = ۲\times۳\times۷\times۴۱ \ k + r$ که $۰ \leq r \leq ۱۷۲۱$. در این صورت

$$۱۷۲۲ \ k + r = ۱۷۲۳ \ k \Rightarrow k = r$$

بنابراین همهٔ جواب‌ها عبارتند از: $m = ۱۷۲۳ \ r \quad ; \quad r = ۰, ۱, \dots, ۱۷۲۱$

۳۰- گزینهٔ ۵

با تالس می‌توان دید: $XT \parallel YZ \parallel AD$ و $XY \parallel TZ \parallel BC$ پس $XYZT$ متوازی‌الاضلاع است و اضلاعش نصف ساق‌ها و $۱۸۰-(C+D) = T\hat{X}Y$ که این درستی سه حکم اول را تضمین می‌کند. M و N را وسط BC و AD گیرید.

اگر $APB < ۹۰ \rightarrow PBC > ۹۰ \rightarrow PM < \frac{BC}{۲}$ به همین شکل $PN < \frac{AD}{۲}$

$$\Rightarrow PM + PN < \frac{AD + BC}{۲} \quad , \quad PM + PN > MN \qquad MN = \frac{AB + CD}{۲}$$

$\Rightarrow \frac{AB + CD}{۲} < \frac{AD + BC}{۲}$ که با محیطی بودن ABCD در تناقض است $\Rightarrow APB > ۹۰$

طراحانِ المپیادهای آزمایشی آیریسک در آزمونِ دومِ سال ۱۳۹۷

رشته	سرگروه و طراح	گروهِ طراحان
ادبی	میرسالار رضوی	نیما بهرامی- مهتا بیگی- فاطمه داوودی- ستایش دشتی- علیرضا فتّاح- سید رضا موسوی هفتادر کاوه وزیری
ریاضی	محمد جعفری	سید فرشید باطنی- آرشام جمشیدی- محمد شریفی- سید حسام فیروزی
زیست‌شناسی	معین قاسمی خشایار قوامی	شایان باقری- علیرضا تنوری- امیرحسین چاوشی- محمدامین خرقانی- عرفان شیرمحمدی شهره عشقی- پیام فتاحی- کیمیا فرهمند- علی گلستانی- مهدی ملک‌پور
شیمی	علیرضا مسکاران	آرش باقریان- بهشاد پوریان- علی جهرمی- ارشیا خادمی- امیرمحمد خلجی- سعید شیری محمدجواد علیمحدی- حمید مفخم- سمیرا میرشی- کسری میرزایی
فیزیک	علیرضا نوروزشاد	منصور بهتاج- علیرضا درویشی- امیر زارع- عرفان شعبانی- نیما محمدزاده
کامپیوتر	امیررضا پوراخوان	دانیال عرفانیان- جواد کریمی
نجوم	احسان مهرجو	محمدصدرا حیدری- امیر شریعت- شایان عزیزی- عطا مرادی
برنامه‌ریزی و هماهنگی مجموعۀ المپیادهای آزمایشی: مرتضی خلینا- افشین زهتاب		

با آرزوی موفقیت برای همۀ شرکت‌کنندگان در این آزمون، پاسخ تشریحی را از ساعت ۱۸ یکشنبه ۳۰ دی از سایت www.gachesefid.com ببینید. برای دیدن کارنامه‌های فردی و رتبه‌بندی، نام کاربری و رمز عبور را **(همین الآن)** از مسئول آزمون بگیرید و در سامانۀ گچ‌سفید وارد شوید، در اولین ورود اطلاعات شما به طور خودکار تکمیل می‌شود. اگر در آزمون قبلی شرکت کرده‌اید، نام کاربری و رمز شما تغییر نکرده و همان است که در سامانه تعریف کرده‌اید.

دورۀ آموزش و جمع‌بندی مرحلۀ دوم المپیادهای علمی و ادبی در روزهای ۶ تا ۱۱ فروردین ۱۳۹۷ در تهران برگزار خواهد شد. شرکت در این دوره برای پذیرفته‌شدگان مرحله اول المپیاد بسیار مفید است.