یا حق

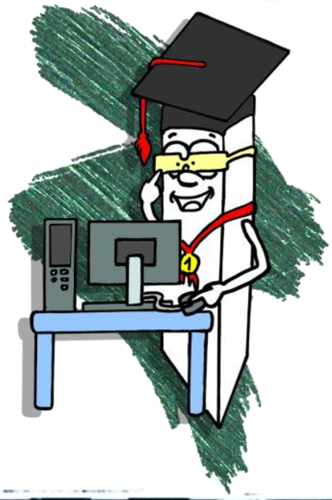
المپیاد آزمایشی آیریسک

شماره داوطلبی و رمز:

پاسخنامه کامپیوتر

دی ۱۳۹۷

۱۸۰ دقیقه



۱- گزینهٔ ۵

مثال با ۱۱ حرف باقی‌مانده به صورت روبه‌رو می‌توان ارائه داد

abba $\rightarrow$ abb

abb $\rightarrow$ ab

ab $\rightarrow$ a

aa $\rightarrow$ aa

حال با حالت‌بندی روی این‌که رشته aa   aacaaa $\rightarrow$ aac

به "aa" کاهش یابد یا "a" و این‌که ۳ رشته شماره‌گذاری شده بالا به ترتیب پیشوند یکدیگر هستند و اندازه رشته باقی‌مانده این ۳ تا دو به دو با هم نابرابر است. می‌توان اثبات کرد جوابی کمتر از ۱۱ موجود نیست.

۲- گزینهٔ ۴

می‌توان عدد ۱ را درنظر گرفت و با حذف کردن ۱ در زیر مجموعه‌هایی که ۱ را دارند یا اضافه کردن آن در زیر مجموعه‌هایی که عدد ۱ را ندارند. تناظری یک به یک بین زیرمجموعه‌هایی با مجموع ارقام فرد و زیر مجموعه‌هایی با مجموع ارقام زوج برقرار کرد. (دقت کنید که با حذف و یا

اضافه کردن «۱» از زیر مجموعه زوجیت مجموع تغییر می‌کند) پس تعداد این دو، برابر و تعداد زیرمجموعه‌هایی با مجموع فرد برابر نصف کل زیرمجموعه‌ها یعنی $\frac{۲^{۱۰}}{۲} = ۲^{۹}$ برابر ۵۱۲ می‌باشد.

۳- گزینهٔ ۱

با کمی بررسی می‌توان دریافت که ستونی وجود دارد که تمام اعداد آن فرد و همچنین سطری وجود دارد که تمام اعداد آن فرد است. در بین حالت‌های موجود با این وضعیت برای این‌که در دو قطر نیز شرط مسئله برقرار باشد تنها حالت ممکن برای وضعیت خانه‌های فرد و زوج به صورت زیر به‌دست می‌آید.

۰	۱	۰
۱	۱	۱
۰	۱	۰

(۱ مکان اعداد فرد و ۰ مکان اعداد زوج است) حال ۵ عدد فرد به !۵ طریق در این ۵ خانه و ۴ عدد زوج به !۴ طریق در ۴ خانه قرار می‌گیرند و طبق اصل ضرب جواب مسئله برابر $۵! \times ۴!$ می‌باشد.

۴- گزینهٔ ۳

اگر اعداد جدول و xor سطر و ستون‌ها را در مبنای ۲ بنویسیم به ازای هر بیت i نیز می‌بایست xor هر سطر برابر بیت i ام جواب آن سطر یا ستون باشد. حال اگر بیت سمت راست اعداد جدول را درنظر بگیرید و به جای هر عدد آن بیت را جایگذاری کنید. سطر اول نشان می‌دهد تعدادی فردی عدد ۱ در این سطر وجود دارد همین‌طور سطرهای دیگر نشان می‌دهند در مجموع تعداد زوجی عدد ۱ در جدول وجود دارد ولی ستون‌ها نشان می‌دهند که تعداد فردی ۱ وجود دارند پس تعداد حالت عددگذاری در این جدول برابر صفر است.

۵- گزینهٔ ۲

دو تیم ۴ نفره و دو تیم ۳ نفره هر کدام یک تاکسی جدید لازم دارند و دو تیم ۲ نفره نیز در ماشین‌های قبلی جا نمی‌گیرند پس آن‌ها هم یک ماشین نیاز دارند پس حداقل ۵ ماشین نیاز است.

به صورت مقابل نیز در کل با ۵ تاکسی گروه‌ها را می‌توان جابجا کرد.

۴	۴	۳,۱	۳,۱	۲,۲
۱	۲	۳	۴	۵

۶- گزینهٔ ۲

اگر به جای a رقم ۰ و به جای b، رقم ۱ و به جای c رقم ۲ را بگذاریم می‌توان تناظری یک به یک بین رشته‌هایی به طول ۸ از این حروف و اعداد ۰ تا $۳^{۸} - ۱$ در مبنای ۳ (۰۰۰۰۰۰۰۰ تا ۲۲۲۲۲۲۲۲) برقرار کرد که ترتیب رشته‌ها نیز به وضوح در این تناظر رعایت می‌شود. حال کافی است ۲۰۱۸ امین عدد در بین این اعداد که همان نمایش ۸ رقمی عدد ۲۰۱۷ در مبنای ۳ است را بیابیم که برابر ۰۲۲۰۲۲۰۱ می‌باشد. در نتیجه رشته متناظر آن و جواب مسئله برابر accaccab می‌باشد.

۷- گزینهٔ ۲

کافی است مسئله را به صورت کلی نگاه کنیم. در کل ۹ تکه از ۲۰ تکه موجود در دو ستون باشند که با تکه بالایی خود رنگ متناقضی داشته باشد. اگر تیکه بالایی هر ستون را درنظر بگیریم (چون این ۲ تکه، تکه‌ای بالای خود ندارند.) تعداد این حالت‌های مختلف برای این تیکه‌ها برابر $\binom{۱۸}{۹}$ می‌شوند. حال در هر ستون انتخاب رنگ تیکه بالایی هر ستون ۲ حالت دارد و بقیه تکه‌ها به صورت یکتا تعیین می‌شود. پس تعداد حالات در کل برابر $۲^۲ \times \binom{۱۸}{۹}$ می‌شود.

۸- گزینهٔ ۲

اگر اختلال نداشته باشیم تعداد ثانیه‌های روشن بودن چراغ برابر $۲ \times \mathrm{ceil}(n/۴)$ می‌شود. اگر اختلال داشته باشیم تعداد دفعات تغییر حالت چراغ برابر $\frac{n}{۲}$ می‌شود و حالت کلی چراغ مانند زیر می‌شود:

xx|xx|xx|x ^ x|xx|xx

اگر فرض کنیم دو لحظه مجاور لحظه اختلال (که قبل و بعد آن وضعیت چراغ عوض می‌شود) دو لحظه‌اند و جواب را حساب کنیم؛ به اندازه یک ثانیه جواب را اضافه حساب کرده‌ایم. پس تعداد ثانیه‌های روشن بودن چراغ برابر است با $۲ \times \mathrm{ceil}\left(\frac{n+۲}{۴}\right) - ۱$.

پس امید ریاضی مطلوبست مسئله برابر است با: $\frac{۱}{۲}\left(۲ \times \mathrm{ceil}\left(\frac{n}{۴}\right)\right) + \frac{۱}{۲}\left(۲ \times \mathrm{ceil}\left(\frac{n+۲}{۴}\right) - ۱\right)$

۹- گزینهٔ ۴

اگر متحرک روی نقطه (p,q) باشد که $۳|p$, $۳|q$ و یک حرکت عمودی یا یک حرکت افقی انجام دهد می‌بایست به همان ترتیب ۲ حرکت دیگر در همان جهت انجام دهد. پس چون در ابتدا نیز روی خانه $(۰,۰)$ قرار دارد می‌توان مسیر حرکت را ۳ تا ۳ تا تقسیم کرد. مسئله تبدیل به مسئله تعداد حالات مسیر از $(۰,۰)$ به $(۳,۲)$ می‌شود که برابر $\binom{۳+۲}{۲}=\binom{۵}{۲}$ که برابر ۱۰ می‌باشد.

۱۰- گزینهٔ ۱

به کمک الگوریتم هاول- حکیمی می‌توان گفت تنها دنبالهٔ سوم درست است.

۱۱- گزینهٔ ۵

ابتدا تعداد دنباله‌های قابل تبدیل به دنبالهٔ خوب را پیدا می‌کنیم:

عضو اول به ۱۰ حالت انتخاب می‌شود فرض می‌کنیم: $a_۱ = L$. دنباله‌های خوب به ازای $a_۱ = L$، این ۳ دنباله می‌باشند:

$a_۱$	$a_۲$	$a_۳$	$a_۴$
$L-۱$	$L+۱$	$L+۳$	$L+۵$
L	$L+۲$	$L+۴$	$L+۶$
$L+۱$	$L+۳$	$L+۵$	$L+۷$

$(۱) \to ۳^۳ \qquad (۲) \to ۳^۳ \qquad (۳) \to ۳^۳$

حال به کمک اصل شمول و عدم شمول تعداد این دنباله‌ها را حساب می‌کنیم:

تعداد دنباله‌ها $= ۳ \times ۳^۳ - ۲^۳ \times ۲ + ۱ - ۱$

احتمال خواسته شده $= \dfrac{(۳ \times ۳^۳ - ۲^۳ \times ۲) \times ۱۰}{۲۰ \times ۲۰ \times ۲۰ \times ۱۰}$

۱۲- گزینهٔ ۳

به ازای هر خانه مانند x در ستون i از کندو، عدد $f(x)$ را می‌نویسیم که $f(x)$ برابر تعداد حالت‌های انتخاب یک خانه از هر یک از ستون‌های ۱ تا i (از چپ به راست شماره‌گذاری شده است) که اولاً شرط مسئله را داشته باشد یعنی این خانه‌ها به هم متصل باشند. دوماً خانه x، خانه انتخاب شده ستون i باشد. در می‌یابیم که $f(x)$ برابر جمع $f(y_۱)$ و $f(y_۲)$ است که $y_۱$ و $y_۲$ خانه‌های چپ مجاور $f(x)$ هستند. (در صورت وجود نداشتن دو خانه مجاور چپ یک خانه چپ لحاظ می‌شود و در غیر این صورت $f(x)$ برابر ۱ می‌شود) حال از چپ به راست خانه‌ها را پر می‌کنیم.

پس تعداد کل حالت‌ها برابر $۱۰+۱۴+۱۰=۳۴$ می‌باشد.

	۱		۳	
۱		۳		۱۰
	۲		۷	
۱		۴		۱۴
	۲		۷	
۱		۳		۱۰
	۱		۳	

۱۳- گزینهٔ ۴

مجموعه ۱ تا ۲۰ به ۱۰ مجموعه به شکل زیر افراز می‌شود.

$\{۱,۲,۳,\dots,۲۰\} = \{\{۱,۲,۴,۸,۱۶\}, \{۳,۶,۱۲\}, \{۵,۱۰,۲۰\}, \{۷,۱۴\}, \{۹,۱۸\}, \{۱۱\}, \{۱۳\}, \{۱۵\}, \{۱۷\}, \{۱۹\}\}$

پس در کل تعداد حالات برابر $۱۸۰ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۵$ می‌باشد.

۱۴- گزینهٔ ۳

$f(x)$ را مینیمم زمان برای تایپ n حرف a درنظر می‌گیریم. رابطه زیر برقرار است:

$n = 2k \quad \rightarrow f(n) = \min(f(n-1)+x, f(n/2)+y)$

$n = 2k+1 \rightarrow f(n) = f(n-1)+x$

f(x) نیز که برابر x است پس کافی است مقدار f برای اعداد را از ۱ تا ۱۰ به ترتیب حساب کنید که مقدار $f(10)$ برابر ۳۸۴ می‌شود.

۱۵- حذف! گزینه‌ها به اشتباه وارد شده است.

f(n) را جواب مسئله برای رشته‌ای به شکل مسئله با طول ۲n تعریف می‌کنیم. روی آخرین پرانتز از سمت راست که پرانتزی بسته است حالت‌بندی می‌کنیم که با پرانتزی جفت می‌شود.

در می‌یابیم که $f(n) = f(n-1) + \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$. دقت کنید $f(0) = 1$ (چون رشته به طول ۰ هم یک حالت محسوب می‌شود و یک پرانتزگزاری معتبر است). حال با محاسبه به دست می‌آید که f(n) برابر مقدار جمله ۲n دنباله فیبوناچی است. (جمله ۰ و ۱ دنباله فیبوناچی برابر ۱ و ۱ می‌باشد) پس f(۷) که جواب مسئله است برابر جمع ۱۴ دنباله فیبوناچی است که برابر ۶۱۰ می‌باشد.

۱۶- حذف! گزینه‌ها به اشتباه وارد شده است.

چون ۱۳۹۶ و تمامی اعضای مجموعهٔ داده شده مضرب ۳ نیستند پس هیچ‌گاه عددی مضرب ۳ به‌دست نمی‌آید.

۱۷- گزینهٔ ۴

$\binom{8}{4} - \binom{4}{2}^2 = 70 - 36 = 34$

۱۸- گزینهٔ ۴

این مسأله، همان مسألهٔ اعداد کاتالان بوده که در حالت کلی پاسخ برابر $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ است. باید چهارمین عدد کاتالان را بیابیم که برابر ۱۴ است.

۱۹- گزینهٔ ۴

تعداد حالت‌های ۴ حالت زیر را محاسبه و طبق اصل جمع جواب مسئله برابر جمع آن‌ها به‌دست می‌آید.

اگر ۳ راهی به ۲ راهی وصل شود:
- اگر ۲ راهی به ۴ راهی وصل شود $2 \times 4 \times 4 = 32$
- اگر ۲ راهی به ۳ راهی وصل شود $2 \times 3 \times 3 = 18$

اگر ۳ راهی به ۴ راهی وصل شود:
- اگر ۴ راهی به ۲ راهی وصل شود $4 \times 2 \times 6 = 48$
- اگر ۴ راهی به ۳ راهی وصل شود $4 \times 3 \times 5 = 60$

پس تعداد حالات برابر $32 \times 18 + 48 + 60 = 158$

۲۰- گزینهٔ ۵

طبق خاصیت امید ریاضی کافی است امید ریاضی پریزهای خالی و خراب در هر چند راهی را محاسبه کرده و با هم جمع بزنیم. در ۴ راهی احتمال این‌که ۲ خراب داشته باشیم برابر $\frac{۱}{۲}$ و احتمال این‌که یک خراب هم داشته باشیم برابر $\frac{۱}{۲}$ است پس

$$E(\text{خراب و خالی در ۴ راهی}) = \frac{۱}{۲}\times ۲ + \frac{۱}{۲}\times ۱ = \frac{۳}{۲}$$

و در ۳ راهی احتمال این‌که پریز خراب، خالی بماند $\frac{۲}{۳}$ و احتمال ۰ بودن $\frac{۱}{۳}$ است. پس:

$E(\text{خراب‌های در ۳ راهی}) = \frac{۲}{۳}\times ۱ = \frac{۲}{۳}$ و در ۲ راهی نیز به وضوح ۰ است.

پس جواب مسئله برابر $\frac{۳}{۲}+\frac{۲}{۳}=\frac{۱۳}{۶}$، $\frac{۱۳}{۶}$ می‌باشد.

۲۱- گزینهٔ ۵

الگوریتم تعداد بیت‌های اختلافی دو عدد a,b را در خروجی چاپ می‌کند. اگر a , b را ۲۵۵ و ۲۵۶ بدهیم امتیاز آرپا برابر ۹×۲۵۵ می‌شود و بیشینه است زیرا که ans حداکثر برابر تعداد بیت‌ها یعنی ۹ است و min(a,b) هم حداکثر ۲۵۵ است مگر این‌که هم a و هم b برابر ۲۵۶ باشند که در این صورت امتیاز ۰ می‌شود. پس جواب ۰ است. $۹\times ۲۵۵ \overset{۵}{\equiv} ۰$

۲۲- گزینهٔ ۲

با توجه به توضیح سؤال قبل باید تعداد زوج مرتب‌های (a,b) از ۰ تا ۲۵۵ یعنی (از بین تمام رشته‌های دودویی ۸ رقمی) که در ۴ بیت تنها اختلاف دارند. در نتیجه کافی است ۴ بیت اختلافی را مشخص کنیم و با پیدا کردن a، b به طور یکتا پیدا می‌شود پس در کل $\binom{۸}{۴}\times ۲^{۸}$ حالت زوج مرتب برمی‌داریم که برابر ۱۷۹۲۰ می‌باشد.

۲۳- گزینهٔ ۴

آرپا می‌تواند روشی برای پرسش ارائه دهد که حداکثر ۲۰ شیرینی از دست بدهد. مرحله اول ۵۰۰ سطر اول را انتخاب می‌کند در مرحله دوم نیز از میان ۵۰۰ سطری که احتمال بمب وجود دارد ۲۵۰ سطر انتخاب می‌کند. و با این روند نصف شدن پس از ده مرحله به یک سطر می‌رسیم که بمب تنها در این سطر می‌تواند باشد. که با همین روش این بار از ستون‌ها با ۱۰ پرسش حداکثر می‌تواند خانهٔ بمب را پیدا کند با ساختار درخت تصمیم اثبات می‌شود که کمتر از $۲۰ = \log_{۲}^{۱۰۰۰\times۱۰۰۰}$ حرکت می‌توان خانه بمب را حدس زد پس جواب برابر ۲۰ است.

۲۴- گزینهٔ ۲

اگر به جای رشته از یک جایگشت استفاده کنید. رفتار این الگوریتم ملموس‌تر است. پس از دو حرکت یک جایگشت $1,2,3,\dots,n$ تنها می‌تواند به تمام جایگشت‌های دوری خود تبدیل شود. پس رشته‌های قابل تبدیل محدود است و می‌توان دید، بزرگ‌ترین زیر رشته متوالی متناوب (b,w) در بین رشته‌های به‌دست آمده از رشته صورت سؤال طولی برابر ۴ دارد.

۲۵- گزینهٔ ۳

با توجه به مسئله قبل با حالت‌بندی روی تعداد w به ازای هر رشته ۱۳ رشته به شکل زیر به وجود می‌آید.

تمام رشته‌ها با ۳ تا w را تولید می‌کنند	wwwbbb wwbwbb wbwbwb	تمام رشته‌ها با ۲ تا w را تولید می‌کنند	wwbbbb wbwbbb wbbwbb	تمام رشته‌ها با یک w را تولید می‌کنند	→ bbbbbb wbbbbb

برای ۴ تا w و ۵ تا w و ۶ تا w به تقارن مثل ۳ حالت اول ۵ رشته می‌شود. پس در کل ۱۳ رشته لازم کافی است.

wwwwww
bwwwww
bbwwww ۵ رشته دیگر ←
bwbwww
bwwbww

طراحانِ المپیادهای آزمایشی آیریسک در آزمونِ دومِ سال ۱۳۹۷

رشته	سرگروه و طراح	گروهِ طراحان
ادبی	میرسالار رضوی	نیما بهرامی- مهتا بیگی- فاطمه داوودی- ستایش دشتی- علیرضا فتّاح- سید رضا موسوی هفتادر کاوه وزیری
ریاضی	محمد جعفری	سید فرشید باطنی- آرشام جمشیدی- محمد شریفی- سید حسام فیروزی
زیست‌شناسی	معین قاسمی خشایار قوامی	شایان باقری- علیرضا تنوری- امیرحسین چاوشی- محمدامین خرقانی- عرفان شیرمحمدی شهره عشقی- پیام فتاحی- کیمیا فرهمند- علی گلستانی- مهدی ملک‌پور
شیمی	علیرضا مسکاران	آرش باقریان- بهشاد پوریان- علی جهرمی- ارشیا خادمی- امیرمحمد خلجی- سعید شیری محمدجواد علیمحدی- حمید مفخم- سمیرا میرشی- کسری میرزایی
فیزیک	علیرضا نوروزشاد	منصور بهتاج- علیرضا درویشی- امیر زارع- عرفان شعبانی- نیما محمدزاده
کامپیوتر	امیررضا پوراخوان	دانیال عرفانیان- جواد کریمی
نجوم	احسان مهرجو	محمدصدرا حیدری- امیر شریعت- شایان عزیزی- عطا مرادی
برنامه‌ریزی و هماهنگی مجموعهٔ المپیادهای آزمایشی: مرتضی خلینا- افشین زهتاب		

دورهٔ آموزش و جمع‌بندی مرحلهٔ دوم المپیادهای علمی و ادبی در روزهای ۶ تا ۱۱ فروردین ۱۳۹۷ در تهران برگزار خواهد شد. شرکت در این دوره برای پذیرفته‌شدگان مرحله اول المپیاد بسیار مفید است.

برای اطلاعات بیشتر به سایت آیریسک به نشانی www.irysc.com سر بزنید.